ОПЕРАТОРЫ ТЁПЛИЦА В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА, ПОРОЖДЁННЫЕ РАДИАЛЬНЫМИ СИМВОЛАМИ, И МЕДЛЕННО ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Василевский Н. Л.[*], Грудский С. М.[*,], Максименко Е. А.[**,***]**

[*] *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México*

[**] *ЮФУ, Ростов-на-Дону*

[***] *Instituto Politécnico Nacional, México*

Аннотация

Toeplitz operators with bounded radial symbols on the Bergman space over the unit disk are considered. It is known that the C^*-algebra generated by these operators is commutative and is isometrically isomorphic to a certain subalgebra $\mathcal{A}$ of the algebra of bounded sequences. In this paper we show that $\mathcal{A}$ coincide with the algebra of the bounded sequences (x_n) that are slowly oscillating in the following sence: $|x_m - x_n| \to 0$ when $m/n \to 1$.

§ 1. Операторы Тёплица в пространстве Бергмана, порождённые радиальными ограниченными символами

Пространство Бергмана на единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$, обозначаемое через $A^2(\mathbb{D})$, состоит из аналитических функций, квадратично суммируемых по мере Лебега на плоскости.

Оператор Тёплица с порождающим символом $a \in L^\infty(\mathbb{D})$, обозначаемый через T_a, действует в пространстве $A^2(\mathbb{D})$ по следующему правилу:

$$T_a f = P(af) \qquad (f \in A^2(\mathbb{D})),$$

где P — ортопроектор $L^2(\mathbb{D})$ на $A^2(\mathbb{D})$.

Обозначим через $(e_n)_{n=0}^\infty$ стандартный ортонормированный базис пространства $A^2(\mathbb{D})$:

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n \qquad (z \in \mathbb{D},\ n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}),$$

а через $R\colon A^2(\mathbb{D}) \to \ell_2(\mathbb{N}_0)$ — изометрический изоморфизм, отображающий любую функцию $f \in A^2(\mathbb{D})$ в последовательность её координат в базисе $(e_n)_{n=0}^\infty$.

Пусть $a \in L^\infty(\mathbb{D})$ — ограниченная функция, обладающая радиальной симметрией, т. е. $a(z) = a(|z|)$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Будем отождествлять такую функцию a с её сужением на промежуток $[0, 1]$ действительной оси. Как показали B. Korenblum и K. Zhu [2], оператор RT_aR^{-1} совпадает с оператором умножения на последовательность γ_a в пространстве $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, где

$$\gamma_a = (n+1) \int_0^1 a(\sqrt{r})\, r^n\, dr \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{T}$ — C^*-алгебра, порождённая операторами T_a с радиальными ограниченными символами a, и пусть $\mathcal{A}$ — C^*-подалгебра C^*-алгебры $\ell^\infty(\mathbb{N}_0)$, порождённая последовательностями вида γ_a, где $a \in L^\infty(0, 1)$.

Из результатов [2] следует, что C^*-алгебры $\mathcal{T}$ и $\mathcal{A}$ изометрически изоморфны. В частности, обе эти алгебры коммутативны.

Некоторые свойства алгебры $\mathcal{T}$ изучили С. М. Грудский и Н. Л. Василевский в статье [1]. В частности, они нашли достаточные условия ограниченности и компактности оператора T_a в терминах некоторых средних функции a.

Отметим, что в работах Н. Л. Василевского [7, 8, 9, 10] построены другие коммутативные алгебры операторов Бергмана-Тёплица, соответствующие порождающим символам с другими типами симметрии.

D. Suárez показал [5], что операторы вида T_a, где $a \in L^\infty(0,1)$, не только порождают C^*-алгебру $\mathcal{A}$, но и образуют в ней всюду плотное подмножество.

Настоящая работа основана на статье D. Suárez [6], в которой доказано, что $\mathcal{A}$ совпадает с замыканием в $\ell^\infty(\mathbb{N}_0)$ подпространства $d_1(\mathbb{N}_0)$, состоящего из последовательностей $x = (x_n)_{n=0}^\infty$, удовлетворяющих условию $\|x\|_{d_1} < +\infty$, где

$$\|x\|_{d_1} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \big((n+1)|x_{n+1} - x_n|\big).$$

Используя [6], мы даём явное описание алгебры $\mathcal{A}$:

Теорема 1. *Алгебра $\mathcal{A}$ состоит из всех ограниченных последовательностей $(x_n)_{n=0}^\infty$, слабо осциллирующих в следующем смысле:*

$$\lim_{\frac{m}{n}\to 1} |x_m - x_n| = 0. \tag{2}$$

Функции вида γ_a, где $a \in L^\infty(0,1)$, образуют всюду плотное подмножество в $\mathcal{A}$.

В § 2 отмечены некоторые свойства класса $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$, состоящего из ограниченных последовательностей, удовлетворяющих (2), а § 3 содержит доказательство теоремы 1. Наконец, в § 4 мы приводим пример ограниченной последовательности, которая удовлетворяет условию (2), но не может быть представлена в виде γ_a, $a \in L^\infty(0,1)$.

§ 2. Медленно осциллирующие последовательности

Обозначим через $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$ множество всех ограниченных последовательностей $(x_n)_{n=0}^\infty$, удовлетворяющих (2). Условие (2) понимается в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, таких что $\left|\dfrac{m}{n} - 1\right| < \delta$, выполняется $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Отметим, что понятие слабо осциллирующей последовательности в смысле (2) используется в теории сходимости рядов [4]. В теории операторов более известна (см., например, [3, раздел 2.4]) C^*-алгебра $\mathrm{SO}(\mathbb{N}_0)$, состоящая из всех ограниченных последовательностей $(x_n)_{n=0}^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0. \tag{3}$$

Предложение 1. $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$ *есть собственное подмножество* $\mathrm{SO}(\mathbb{N}_0)$.

Доказательство. Очевидно, любая последовательность из класса $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$ принадлежит $\mathrm{SO}(\mathbb{N}_0)$. Противоположное вложение не выполняется. Например, последовательность $(x_n)_{n=0}^\infty$, где $x_n = \cos\sqrt{n}$, удовлетворяет условию (3), но не (2). □

Сформулируем некоторые простые свойства класса $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$.

Предложение 2. *Условие* (2) *эквивалентно условию*

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty\\ m/n\to 1}} |x_m - x_n| = 0, \tag{4}$$

которое понимается в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, таких что $m > \frac{1}{\delta}$, $n > \frac{1}{\delta}$ и $\left|\frac{m}{n} - 1\right| < \delta$, выполняется $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Доказательство. Очевидно, из условия (2) следует (4). Предположим, что выполняется (4), и покажем, что имеет место (2).

Пусть $\varepsilon > 0$. Используя (4), найдём такое $\delta \in (0,1)$, что $|x_m - x_n| < \varepsilon$ при $m > \frac{1}{\delta}$, $n > \frac{1}{\delta}$ и $\left|\frac{m}{n} - 1\right| < \delta$.

Пусть теперь относительно $m, n \in \mathbb{N}$ известно только то, что $\left|\frac{m}{n} - 1\right| < \frac{\delta}{2}$. Тогда либо $m = n$, либо $m \neq n$. В последнем случае

$$n > \frac{|m-n|}{\delta/2} \geq \frac{2}{\delta}$$

и

$$m \geq n - |m-n| > n - \frac{n\delta}{2} > \frac{n}{2} \geq \frac{1}{\delta},$$

следовательно, $|x_m - x_n| < \varepsilon$. □

Предложение 3. $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$ *является C^*-подалгеброй алгебры $\ell^\infty(\mathbb{N}_0)$.*

Доказательство. Очевидно, $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$ замкнуто относительно линейных операций и операции сопряжения.

Если $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$ и $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$, то с помощью неравенства

$$|x_m y_m - x_n y_n| \leq |x_m|\,|y_m - y_n| + |x_m - x_n|\,|y_n|$$

легко видеть, что $xy = (x_n y_n)_{n=1}^\infty \in \mathrm{SO}(\mathbb{N}_0)$.

С помощью обычного "$\varepsilon/3$-рассуждения" покажем, что множество $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$ замкнуто в топологии $\ell^\infty(\mathbb{N}_0)$. Пусть последовательность $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ принадлежит замыканию $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$ и пусть $\varepsilon > 0$. Найдём такую последовательность $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$, что $\|x - y\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Далее найдём такое $\delta > 0$, что при $\left|\frac{m}{n} - 1\right| < \delta$ выполняется $|y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда при таких же m, n получим, что

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - y_m| + |y_m - y_n| + |y_n - x_n| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$ □

Предложение 4. $\mathrm{SO}(\mathbb{N}_0)$ *содержит все последовательности, имеющие конечный предел.*

Доказательство очевидно.

§ 3. Доказательство основного результата

Учитывая результат Suárez [6], достаточно показать, что замыкание подпространства $d_1(\mathbb{N}_0)$ в пространстве $\ell^\infty(\mathbb{N}_0)$ совпадает с $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$.

Сначала заметим, что если $x \in d_1(\mathbb{N}_0)$, то $x \in \mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$:

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{1}{m} \sum_{k=m}^{n-1} (k|x_{k+1} - x_k|) \leq \|x\|_{d_1} \left(1 - \frac{n}{m}\right).$$

Теперь предположим, что $x \in \mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$ и $\varepsilon > 0$. Мы собираемся построить последовательность $y = (y_n) \in d_1(\mathbb{N}_0)$, такую что $\|y - x\|_\infty \leq \varepsilon$.

Используя условие (2), найдём число $\delta \in (0,1)$, такое что $|x_m - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ при $\left|\frac{m}{n} - 1\right| \leq 3\delta$. Положим

$$K = \left\lfloor \frac{2}{\delta^2} \right\rfloor + 1,$$
$$\nu_k = \lfloor (1+\delta)^k \rfloor \quad (k \in \mathbb{N}),$$

где $\lfloor\ \rfloor$ обозначает операцию взятия целой части числа.

Если $k \geq K$, то из неравенства Бернулли следует, что $\frac{\delta}{2}(1+\delta)^k > 1$, и

$$\frac{\delta\nu_{k+1}}{4} < \nu_{k+1} - \nu_k < 3\delta\nu_k.$$

Определим последовательность $y = (y_n)$ равной x_n при $n < \nu_K$; при $n \geq \nu_K$ положим $y_n = x_n$ в узлах $n = \nu_k$, воспользуемся линейной интерполяцией для определения y_n между этими узлами:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n, && n < \nu_K; \\ y_{\nu_k+r} &= x_{\nu_k} + \frac{(x_{\nu_{k+1}} - x_{\nu_k})r}{\nu_{k+1} - \nu_k}, && k \geq K, \quad 0 \leq r < \nu_{k+1} - \nu_k. \end{aligned}$$

Если $k \geq K$, то $\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k} - 1 < 3\delta$, и из выбора δ следует, что $|x_{\nu_{k+1}} - x_{\nu_k}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Если $n \geq \nu_K$, то $\nu_k \leq n < \nu_{k+1}$ для некоторого $k \geq K$, и

$$|y_{n+1} - y_n| = \frac{|x_{\nu_{k+1}} - x_{\nu_k}|}{\nu_{k+1} - \nu_k} \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\delta\nu_{k+1}}{4}} \leq \frac{2\varepsilon}{(n+1)\delta}.$$

Таким образом, $\|y\|_{d_1} \leq \max\left\{\frac{2\varepsilon}{\delta}, \|x\|_\infty \nu_K\right\}$ и $y \in d_1(\mathbb{N}_0)$.

Покажем теперь, что $\|y - x\|_\infty \leq \varepsilon$. Если $n < \nu_K$, то $x_n = y_n$. Если $n \geq \nu_K$, то n можно записать в виде $\nu_k + r$, где $k \geq K$ и $r \leq \nu_{k+1} - \nu_k$, и мы получаем что

$$|y_n - x_n| \leq |y_n - y_{\nu_k}| + |x_{\nu_k} - x_n| \leq |x_{\nu_{k+1}} - x_{\nu_k}| + |x_{\nu_k} - x_n| \leq \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Пример

Рассмотрим последовательность $x = (x_n)_{n=0}^\infty$, определённую по формуле:

$$x_n = \sin \frac{\pi\lfloor\log_2(n+2)\rfloor}{\sqrt{\log_2(n+2)}} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Покажем, что x принадлежит классу $\mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$, но не может быть представлена в виде γ_a, где $a \in L^\infty(0,1)$.

Доказательство. 1. Если $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, то

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq \frac{\pi\lfloor\log_2(m+2)\rfloor}{\sqrt{\log_2(m+2)}} - \frac{\pi\lfloor\log_2(n+2)\rfloor}{\sqrt{\log_2(n+2)}} \leq \frac{\pi\log_2(m+2)}{\sqrt{\log_2(m+2)}} - \frac{\pi(\log_2(n+2)-1)}{\sqrt{\log_2(n+2)}} \\ &= \frac{\pi\log\frac{m+2}{n+2}}{\sqrt{\log_2(m+2)+\log_2(n+2)}} + \frac{\pi}{\sqrt{\log_2(n+2)}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{m/n\to 1\\ m,n\to+\infty}} |x_m - x_n| = 0,$$

так что $x \in \mathrm{SO}_1(\mathbb{N}_0)$.

2. Как заметил Suárez [6], из результатов теории моментов следует, что любая последовательность вида γ_a, где $a \in L^\infty(0,1)$, принадлежит классу $d_1(\mathbb{N}_0)$. Покажем, что $x \notin d_1(\mathbb{N}_0)$.

При $n = 2^{k^2} - 3$ получим, что

$$x_n = \sin \frac{\pi(k^2-1)}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-1)}}, \qquad x_{n+1} = \sin \frac{\pi k^2}{k} = 0.$$

Пользуясь формулами

$$|\sin(\alpha + k\pi)| = |\sin(\alpha)| \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad |\sin(\alpha)| \geq \frac{2\alpha}{\pi} \quad \left(|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

оценим снизу выражение $|x_{n+1} - x_n|$, где $n = 2^{k^2} - 3$:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \left| \sin\left(\frac{\pi(k^2-1)}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-1)}} - k\pi \right) \right| \geq \frac{2}{\pi} \left(k\pi - \frac{\pi(k^2-1)}{\sqrt{\log_2(2^{k^2}-1)}} \right) \\ &\geq \frac{2}{\pi} \left(k\pi - \pi\sqrt{k^2-1} \right) \geq \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{\log_2(n+3)}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что величина $(n+1)|x_{n+1} - x_n|$ может принимать сколь угодно большие значения, так что $x \notin d_1(\mathbb{N}_0)$. □

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Grudsky G., Vasilevski N.*, Bergman–Toeplitz operators: radial component influence // Integral Equations Operator Theory. 2001. V. 40, P. 16–33.

[2] *Korenblum B., Zhu K.* An application of Tauberian theorems to Toeplitz operators // J. Operator Theory. 1995. V. 339. P. 353–361.

[3] *Rabinovich V., Roch S., Silbermann B.* Limit operators and their application in Operator theory. Serie: Operator Theory, Advances and Applications, Vol. 150. Birkhäuser Verlag AG, Basel – Boston – Berlin, 2004.

[4] *Schmidt R.* Über divergente Folgen und lineare Mittelbindungen. Math. Z. 1924. V. 22. P. 89–152.

[5] *Suárez D.* Approximation and n-Berezin transform of operators on the Bergman space. J. Reine Angew. Math. 2005. V. 581. P. 175–192.

[6] *Suárez D.* The eigenvalues of limits of radial Toeplitz operators // Bull. London Math. Soc. 2008. V. 40. P. 631–641.

[7] *Vasilevski N. L.* On Bergman-Toeplitz operators with commutative symbol algebras // Integr. Equat. Oper. Th. 1999. V. 34. No. 1. P. 107–126.

[8] *Vasilevski N. L.* On the structure of Bergman and poly-Bergman spaces // Integr. Equat. Oper. Th. 1999. V. 33. No. 4. P. 471–488.

[9] *Vasilevski N. L.* Bergman space structure, commutative algebras of Toeplitz operators and hyperbolic geometry // Integr. Equat. Oper. Th. 2003. V. 46. No. 2. P. 235–251.

[10] *Vasilevski N. L.* Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman spaces. Birkhäuser Verlag AG, Basel – Boston – Berlin, 2008.